

Zestaw III – podsumowujący

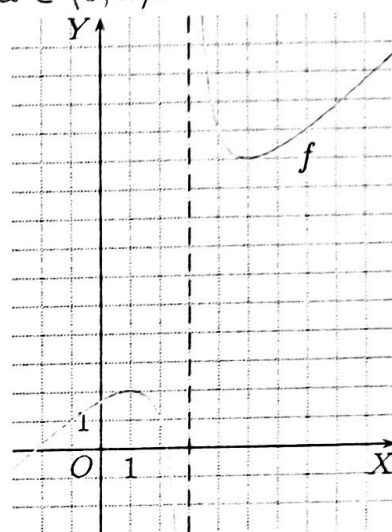
43. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{(1-2x)^2}$ i prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty $A(9,0)$ i $B(0,-1)$.
44. Wykaż, że styczne do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-6}{x-3}$, $x \neq 3$, poprowadzone w punktach jego przecięcia z osiami układu współrzędnych, są równoległe. Oblicz odległość między tymi stycznymi.

45. Prosta o równaniu $y = \frac{1}{4}x$ jest styczna do wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2-x}{3x+1} + \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

w punkcie o dodatniej odciętej. Wyznacz α , jeśli $\alpha \in \langle 0; \pi \rangle$.

46. Dane są funkcje $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Dla jakiej wartości parametru a styczne do wykresów funkcji f i g w punkcie ich przecięcia są prostopadłe?

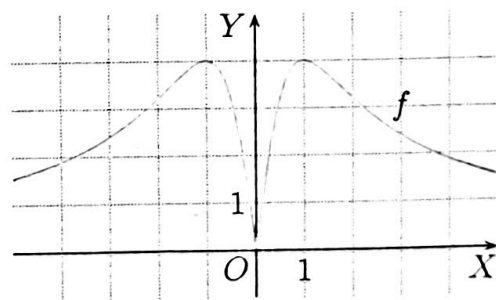


47. Funkcja $f(x) = \frac{x^2-5}{x-3}$ (rysunek obok) w punkcie A osiąga maksimum, a w punkcie B – minimum. Wyznacz współrzędne punktów A i B oraz równanie prostej przechodzącej przez środek odcinka AB i równoległej do stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej równej 2.

48. Punkt $P(1, -2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+ax-4}{x+b}$, $b \neq -1$. Styczna do tego wykresu poprowadzona w punkcie P jest prostopadła do prostej $3x + y + 5 = 0$. Oblicz a i b .

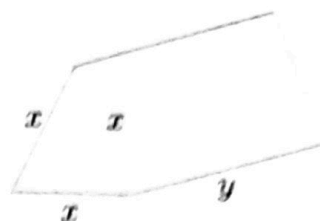
49. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{8x}{x^2+1} \right|$.

- a) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f .
- b) Uzasadnij, że funkcja f nie ma pochodnej w $x_0 = 0$.



50. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(3,4)$ i ograniczającej z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu. Oblicz pole tego trójkąta.
51. W okrąg o promieniu 1 wpisano trójkąt równoramienny. Niech x oznacza odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta. Dla jakiej wartości x pole trójkąta jest największe? Oblicz to pole.

52. Namiot ma kształt graniastosłupa prawidłowego trójkątnego (rysunek obok). Pole powierzchni całkowitej namiotu (łącznie z podłogą) jest równe $18\sqrt{3} \text{ m}^2$. Dla jakiej długości krawędzi $x \in \langle 2; 3 \rangle$, podanej w metrach, objętość namiotu będzie największa?



53. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 16. Jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było najmniejsze?
54. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a . Wyznacz taką wysokość ostrosłupa, dla której jego objętość jest największa i uzasadnij, że kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest rozwarty.
55. Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(6,0)$ i $C(x,y)$. Wyznacz współrzędne punktu C tak, aby pole trójkąta ABC było największe, jeśli punkt ten należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ oraz $x \in \langle -2; 1 \rangle$. Oblicz pole tego trójkąta.

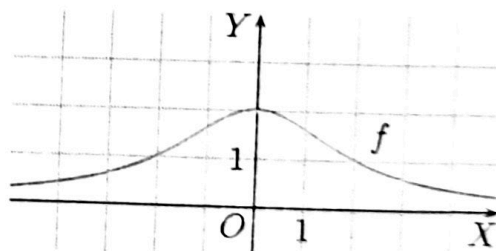
56. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do wykresu funkcji f i leżącego najbliżej prostej $x - y + 2 = 0$.

a) $f(x) = 1 - x^2$

* b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

57. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego styczną do tego wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ oraz osiami układu współrzędnych, jeśli:

a) $x_0 = 2$, b) $x_0 = 4$.



58. Naszkicuj wykres funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

c) $f(x) = \frac{-8x}{x^2+4}$

e) $f(x) = \frac{8}{x^2-2x+2}$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

d) $f(x) = \frac{4x^2}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$

59. Wyznacz dziedzinę funkcji f , określ jej najmniejszą wartość oraz naszkicuj wykres, jeśli:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n})$$

60. Funkcja f przyporządkowuje parametrowi p sumę sześciąt pierwiastków równania $x^2 + px + \frac{p}{2} = 0$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .