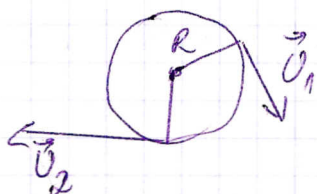


RUCH OBROTOWY CIEŁ SZTYWNYCH

①

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu ($\epsilon = \text{const}$)



Przyspieszenie kątowe ϵ :

$$\left| \epsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| \quad \epsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} \quad [\epsilon] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\left| \epsilon = \frac{a}{R} \right|$$

Moment bezwładności punktu materialnego

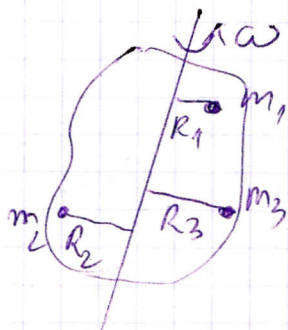


$$\left| J = mR^2 \right|$$

$$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

R - odległość masy „ m ” od osi obrotu

Moment bezwładności ciał sztywnych



$$J = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \dots + m_n R_n^2$$

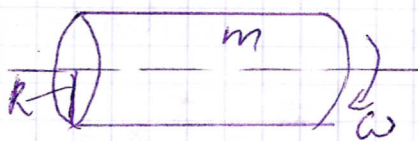
$$\left| J = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right|$$

Kula



$$\left| J = \frac{2}{5} mR^2 \right|$$

Walec, krążek



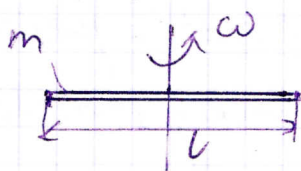
$$\left| J = \frac{1}{2} mR^2 \right|$$

Obręcz



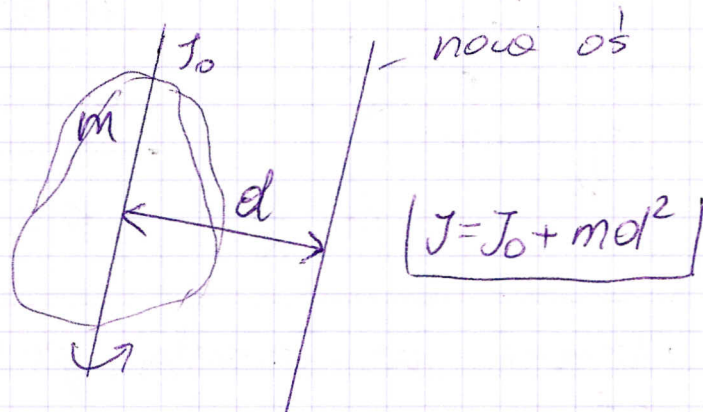
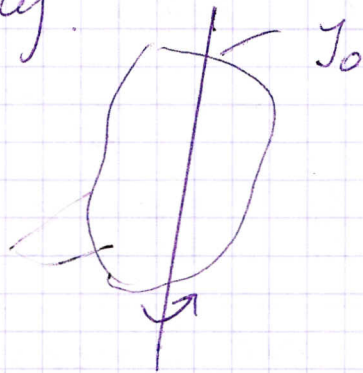
$$\left| J = mR^2 \right|$$

Pręt

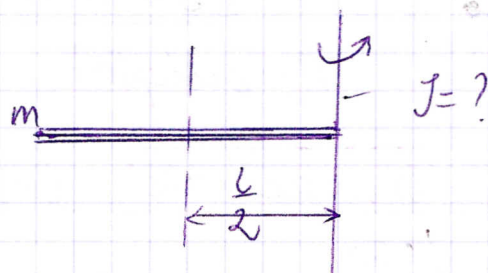
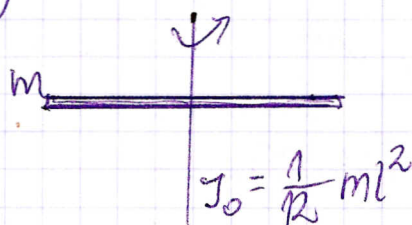


$$\left| J = \frac{1}{12} ml^2 \right|$$

Twierdzenie Steimera - porusze obrotowy moment bezwładności były względem osi, która jest równoległa do osi obrotu, dla którego moment bezwładności znamy.



Przykład:

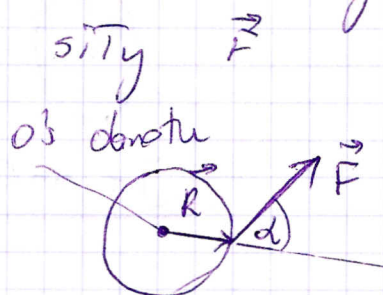


$$J = J_0 + md^2 \quad d = \frac{1}{2}l$$

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{1}{2}l \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

$$\boxed{J = \frac{1}{3} ml^2}$$

Moment siły \vec{M} - wielkość wektorowa, która jest równa iloczynowi wektorowemu promienia \vec{R} i



$$\boxed{\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}}$$

$$\boxed{M = RF \sin \alpha}$$

\vec{R} - wektor wskazujący punkt przyłożenia siły \vec{F}

Wektor momentu siły \vec{M} jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory \vec{R} i \vec{F} , a zwrot wyznacza się stosując regułę: prawej ręki lub śruby prawoskrętnej

$$\boxed{[M] = N \cdot m}$$

(2)

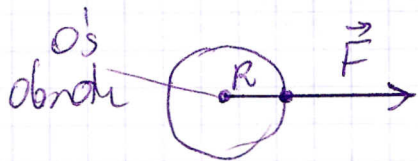
2- kąt zawarty między kierunkami wektora \vec{R} i wektora siły \vec{F}

* $\sin \alpha = 1$ $\alpha = 90^\circ$ $\vec{R} \perp \vec{F}$



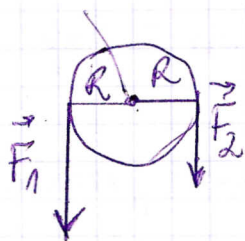
$M = R F$ - max. wartość

* $\sin \alpha = 0$ $\alpha = 0^\circ$ $\vec{R} \parallel \vec{F}$



$M = 0$ nie ma ruchu obrotowego

Jeżeli na ciele działa kilka sił, to wyznaczamy moment wypadkowy oś obrotu

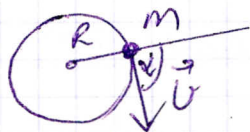


$$M = M_1 - M_2$$

$$M = F_1 \cdot R - F_2 \cdot R$$

Moment pędu \vec{J} - iloczyn wektorowy wektora \vec{R} i pędu \vec{p}

dla punktu materialnego



$$\vec{J} = \vec{R} \times \vec{p} \quad J = R p \sin \alpha \quad p = m \cdot v$$

$$|J| = m R v \sin \alpha$$

$|J| = m R v$ - max wartość

dla bryły sztywnej

$$v = \omega \cdot R$$

$$m R^2 = J$$

$$J = m R \omega \cdot R = m R^2 \omega$$

$$|J| = J \cdot \omega$$

jednostka

$$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{1}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Zasada zachowania momentu pędu

W izolowanym układzie ciał (moment M sił zewnętrznych $= 0$) moment pędu jest stały.

$$J = \text{const}$$

$$J \cdot \omega = \text{const}$$

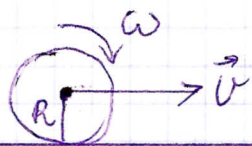
Przykłady: piruety na lodzie, obrotowy na krzesle obrotowym.

Energia kinetyczna ruchu obrotowego



$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

Energia kinetyczna ciała toczącego się bez poślizgu



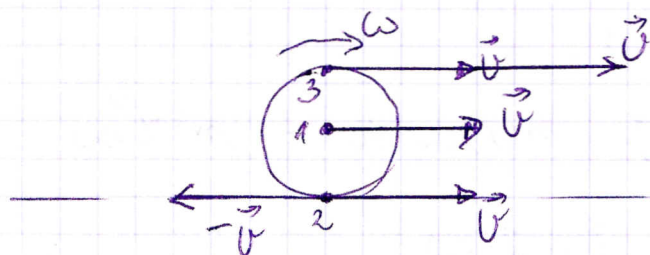
$$E_k = E_{ko} + E_{kp}$$

$$E_{ko} = \frac{J\omega^2}{2} \quad - \text{energia kinetyczna ruchu obrotowego}$$

$$E_{kp} = \frac{mv^2}{2} \quad - \text{energia kinetyczna ruchu postępowego}$$

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Prędkości liniowe punktów ciała toczącego się bez poślizgu



$$v_1 = v$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = 2v$$

Zasady dynamiki Newtona

I zasada dynamiki

Jeżeli moment wypadkowy wszystkich sił działających na ciało jest równy zero, to ciało porusza się sprężynką lub porusza się ruchem jednostajnym obrotowym.

$$M_{\text{w}} = 0 \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \text{const} \quad \varepsilon = 0 \end{cases}$$

II zasada dynamiki

Jeżeli moment wypadkowy ma wartość stałą, to ciało wykonuje ruch obrotowy jednostajnie zmienny z przyspieszeniem kątowym

$$\boxed{\varepsilon = \frac{M}{J}}$$

Analogie ruchu postępowego i obrotowego

| Ruch postępowy | Ruch obrotowy |
|---|---|
| prędkość liniowa v $\boxed{v = \omega \cdot R}$ | prędkość kątowa ω |
| przyspieszenie liniowe a $\boxed{a = \varepsilon \cdot R}$ | przyspieszenie kątowe ε |
| masa m | moment bezwładności $\boxed{J = mR^2}$ |
| siła F | moment siły $\boxed{M = F \cdot R}$ |

• pęd ciała $|p = mv|$

moment pędu
 $|J = I \cdot \omega|$

zasada zachowania pędu
 $p = \text{const}$

zasada zachowania
momentu pędu $|I \cdot \omega = \text{const}|$

energia kinetyczna

$$|E_k = \frac{mv^2}{2}|$$

energia kinetyczna

$$|E_k = \frac{I\omega^2}{2}|$$

I zasada dynamiki
jeżeli $F_w = 0$ $\begin{cases} v = 0 \\ v = \text{const} \end{cases}$

I zasada dynamiki
jeżeli $M_w = 0$ $\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \text{const} \end{cases}$

II zasada dynamiki
jeżeli $F_w = \text{const}$: $a = \text{const}$
 $|a = \frac{F_w}{m}|$

II zasada dynamiki
jeżeli $M_w = \text{const}$
 $\epsilon = \text{const}$
 $| \epsilon = \frac{M}{J} |$