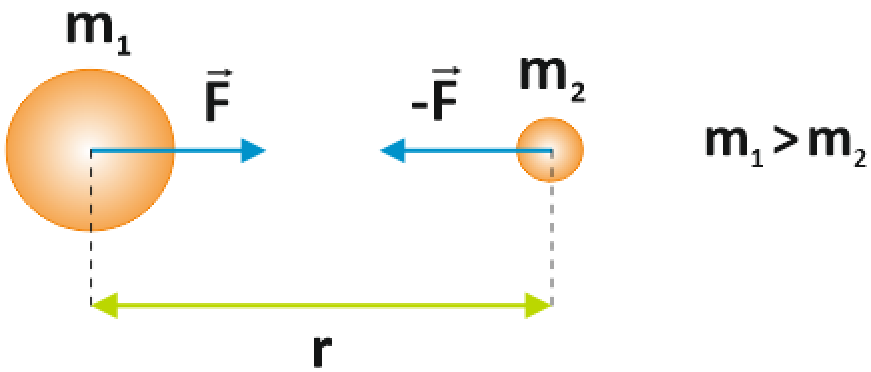
POLE GRAWITACYJNE

PRAWO CIĄŻENIA POWSZECHNEGO

Wyjaśnienie prawa powszechnego ciążenia podał Izaak Newton w 1686 roku.
Stwierdził, że ta sama siła, która przyciąga przedmioty znajdujące się w pobliżu Ziemi, musi przyciągać również Księżyc krążący dookoła Ziemi. Newton w swoich rozważaniach poszedł dalej. Stwierdził, że skoro Ziemia krąży wokół Słońca, to znaczy, że Słońce przyciąga Ziemię siłą o tym samym charakterze. To samo dotyczy również innych planet krążących wokół Słońca. W myśl trzeciej zasady dynamiki każda z planet musi wzajemnie przyciągać Słońce z taką samą siłą, lecz przeciwnie zwróconą.

<u>Treść prawa ciążenia powszechnego:</u>



Wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie. Dwie masy punktowe przyciągają się wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między ich środkami:

$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F - siła przyciągania wzajemnego ciał nazywa się *siłą powszechnego ciążenia* albo *siłą grawitacji* [N]

m_1 , m_2 – masy ciał [kg]

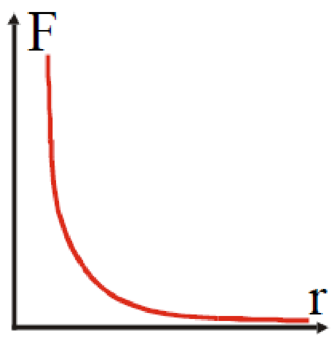
r – odległość między środkami mas [m]

G – stała grawitacji , wyznaczona doświadczalnie $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

Stała grawitacji jest jednakowa w całym Wszechświecie.

Wykres zależności siły grawitacji **F**

od odległości między ich środkami **r**

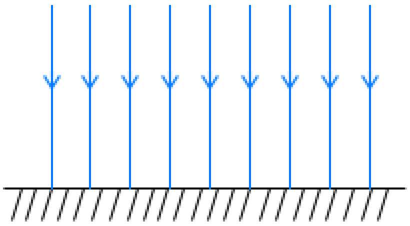


Natężenie pola grawitacyjnego

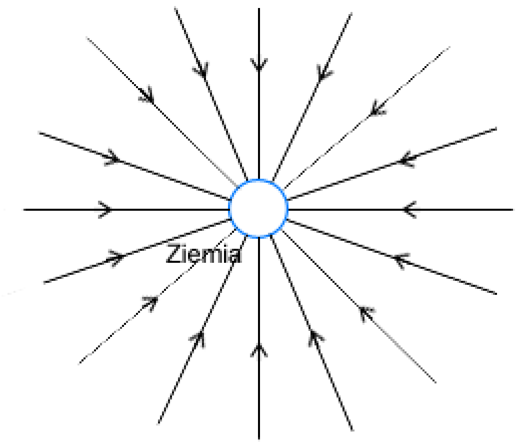
1. Pole grawitacyjne jest polem wektorowym, można je więc przedstawić na rysunku za pomocą linii pola.
   Linie pola grawitacyjnego, są to linie do których styczne są wektory sił grawitacyjnych działających na masę próbną umieszczoną w tym polu.
   Masa próbna – bardzo mała masa.

   Wyróżniamy dwa rodzaje pola grawitacyjnego:

a) **jednorodne** – przy powierzchni planety na niewielkim obszarze np. przy powierzchni Ziemi



b) **centralne** – gdy ciało jest kuliste, lub traktujemy ciało jako punkt materialny -np. na Ziemię patrzymy z dużej odległości



2. Natężenie pola grawitacyjnego, jest to **wektorowa wielkość fizyczna**, która charakteryzuje pole grawitacyjne. Definiujemy je jako stosunek siły grawitacyjnej działającej na ciało próbne w danym punkcie pola grawitacyjnego do masy tego ciała:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Kierunek i zwrot wektora natężenia pola grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ jest taki sam, jak kierunek i zwrot siły grawitacji działającej na masę próbną.

Wartość natężenia pola grawitacyjnego obliczamy ze wzoru:

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

γ – natężenie pola grawitacyjnego

F – siła grawitacji [N]

m – masa ciała [kg]

Jednostka natężenia pola: $[\gamma] = \frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}$

W polu centralnym , czyli wytworzonym przez ciało kuliste siłę grawitacji obliczamy z prawa ciążenia powszechnego:

$$F = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}$$

Wzór ten wstawiamy do natężenia pola grawitacyjnego:

$$\gamma = \frac{F}{m} = G\,\frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{1}{m}$$

po skróceniu masy m, otrzymujemy wzór:

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma = \frac{G \cdot M}{r^2}}}$$

$\boldsymbol{\gamma}$ **-** natężenie pola grawitacyjnego w danym punkcie pola

G – stała grawitacji

M – masa ciała, która wytwarza pole grawitacyjne [kg]

r – odległość punktu pola od środka masy M [m]

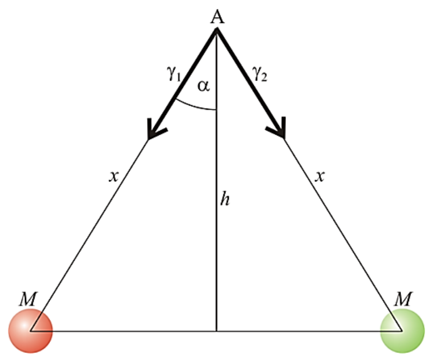
W polu centralnym, im dalej od środka masy M , tym natężenie pola jest mniejsze, czyli pole jest słabsze.

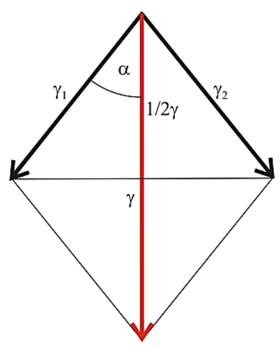
W polu jednorodnym siłę grawitacji obliczamy ze wzoru: **F = m · g** i natężenie pola ze wzoru:

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{F}{m}}$$

W polu jednorodnym natężenie pola ma wartość stałą.

Jeżeli źródłem pola jest kilka ciał, stosujemy **zasadę superpozycji pól** (wektorową sumę natężeń).





Przyspieszenie grawitacyjne

Ziemskie przyspieszenie grawitacyjne jest to przyspieszenie ciał swobodnie spadających na Ziemię, bez oporów ruchu. Według zasad dynamiki przyśpieszenie jest powodowane przez zewnętrzną siłę. W tym przypadku jest nią działająca na to ciało siła grawitacji.

Ziemia nadaje wszystkim ciałom jednakowe przyspieszenie g, niezależne od ich masy m:

$$m \cdot g = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$\boxed{g = \frac{G \cdot M}{r^2}}$$

g – przyspieszenie ziemskie $[\frac{m}{s^2}]$
G – stała grawitacji
M – masa Ziemi [kg]
r – promień Ziemi [m]

Jeżeli ciało znajduje się na wysokości **h** nad powierzchnią Ziemi , to:

$$g = \frac{G \cdot M}{(r+h)^2}$$

Takie same wzory stosujemy przy obliczaniu przyspieszania grawitacyjnego w polu grawitacyjnym innych ciał niebieskich. Wtedy:

M – masa ciała niebieskiego [kg]
r – promień ciała niebieskiego [m]

Dla jednorodnego pola grawitacyjnego siła działająca na ciało jest stała co do wartości **F = m · g.** Przyspieszenie także będzie miało wartość stałą w czasie.

Do obliczeń nie wymagających szczególnej dokładności przyjmuje się wartość przyspieszenia ziemskiego równą 9,81m/s^2

Wartość przyspieszenia ziemskiego zależy od **szerokości geograficznej** oraz **wysokości nad poziomem morza**. Wraz z wysokością przyspieszenie maleje. Jest to wynikiem zmniejszania się siły grawitacji zgodnie z prawem powszechnego ciążenia.

Zmniejszanie się przyspieszenia ziemskiego wraz z zmniejszaniem szerokości geograficznej jest spowodowane działaniem pozornej siły odśrodkowej, która powstaje na skutek ruchu obrotowego Ziemi.

Ciężar ciała i przyspieszenie ziemskie na różnych szerokościach geograficznych

***Ciężar ciała Q** – siła wypadkowa będąca sumą geometryczną siły grawitacyjnej i siły odśrodkowej bezwładności związanej z ruchem obrotowym Ziemi wokół własnej osi.*

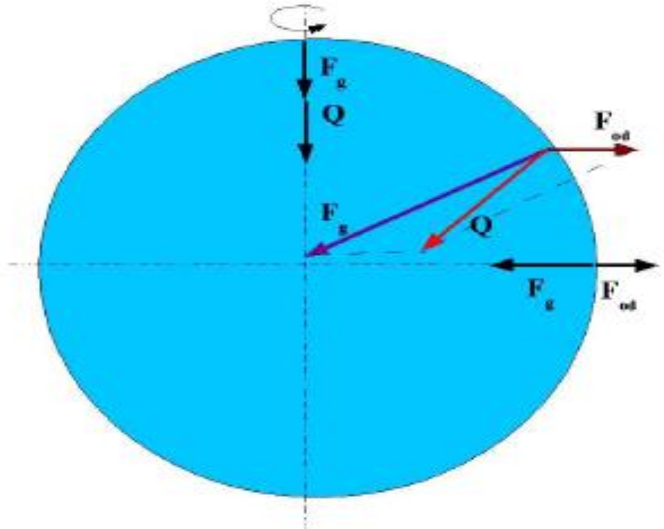
Na równiku:

$$Q = F_g - F_{od}$$

$$m \cdot g_r = m \cdot g - m \cdot a_d$$

$$\boldsymbol{g_r = g - a_d}$$

$$g_r < g$$



Na dowolnej szerokości geograficznej:

$$\vec{Q} = \vec{F_g} + \vec{F}_{od}$$

$$g_\varphi > g_r$$

Na biegunie:

$F_{od} = 0$

$$Q = F_g$$

$$m \cdot g_b = m \cdot g$$

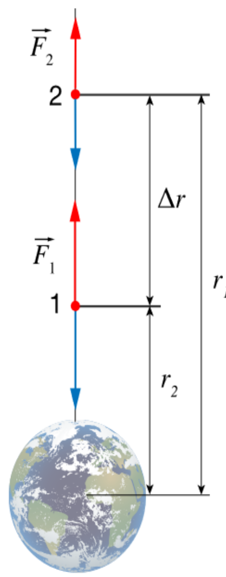
$$\boldsymbol{g_b = g}$$

Wybrane wartości przyspieszenia ziemskiego:

- biegun - 9,83332 $\frac{m}{s^2}$
- normalne – 9,80665 $\frac{m}{s^2}$
- równik – 9,78030 $\frac{m}{s^2}$
- Gdańsk – 9.8145 $\frac{m}{s^2}$

Praca i energia potencjalna w centralnym polu grawitacyjnym

1. Praca w centralnym polu grawitacyjnym



Przy przeniesieniu ciała z punktu **1** do punktu **2** wartość siły się zmienia. Siła zewnętrzna wykonująca pracę, w każdym punkcie jest równa sile grawitacji.

Zgodnie z prawem ciążenia powszechnego siła się zmniejsza. Dlatego wartość pracy wykonanej przez tę siłę można obliczyć z zależności:

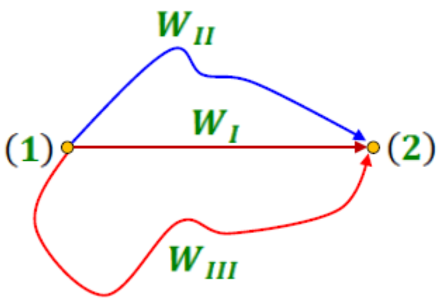
$$\boldsymbol{W = F_{średnia} \cdot \Delta r}$$

$\boldsymbol{\Delta r = r_1 - r_2}$ - przemieszczenie ciała

$$\boldsymbol{F_1 = \frac{GMm}{r_2^2}} \qquad \boldsymbol{F_2 = \frac{GMm}{r_1^2}}$$

$$W = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

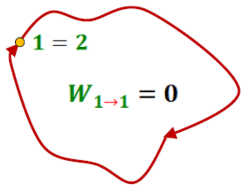
Z powyższego wzoru wynika, że wartość wykonanej pracy **nie zależy od toru**, po jakim było przenoszone ciało pomiędzy punktami 1 i 2.
Istotne jest jedynie położenie początkowe i końcowe.



$$W_I = W_{II} = W_{III}$$

Pole sił, w którym wartość wykonanej pracy nie zależy od długości drogi, po jakiej ciało zostało przeniesione z punktu 1 do punktu 2, nazywa się polem zachowawczym.

Praca wykonana na torze zamkniętym ma wartość zerową



2. Energia potencjalna w centralnym polu grawitacyjnym

Energia potencjalna związana z oddziaływaniami grawitacyjnymi jest równa pracy, jaką musi wykonać siła grawitacyjna, aby rozsunąć te ciała na odległość nieskończenie wielką:

$$W_{A\to\infty} = \Delta E_p$$

Umownie przyjęto, że w nieskończoności energia potencjalna jest równa zeru.

Energię potencjalną obliczamy ze wzoru:

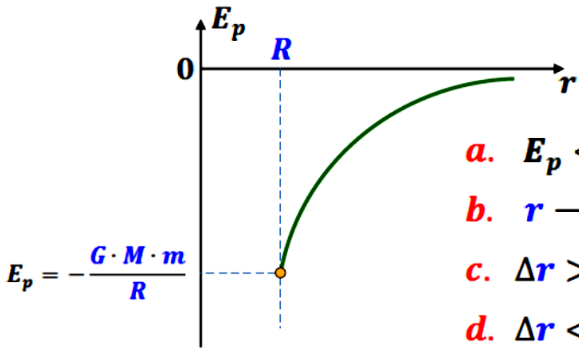
$$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

M – masa jednego ciała [kg]

m – masa drugiego ciała [kg]

r – odległość między środkami mas M i m [m]

Z powyższego równania wynika, że w **polu centralnym energia potencjalna** przyjmuje tylko wartości ujemne. Dzieje się tak dlatego, że wzrost odległości musi powodować wzrost wartości **energii potencjalnej**, jednak przy odległości nieskończenie dużej **oddziaływanie grawitacyjne** jest równe zero, więc **energia potencjalna** też musi być równa zero. Aby te warunki mogły być spełnione wartość energii musi wzrastać od liczby ujemnej.



$a.\quad E_p < 0$

$b.\quad r \longrightarrow \infty \Longrightarrow \frac{1}{r} \longrightarrow 0 \Longrightarrow E_p \longrightarrow 0 = max$

$c.\quad \Delta r > 0 \Longrightarrow \Delta E_p > 0$

$d.\quad \Delta r < 0 \Longrightarrow \Delta E_p < 0$

3. <u>Zasada zachowania energii w centralnym polu grawitacyjnym</u>

Całkowita energia mechaniczna jest równa sumie energii potencjalnej i energii kinetycznej i ma wartość stałą:

$$E = E_p + E_k = const$$

$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$	$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$

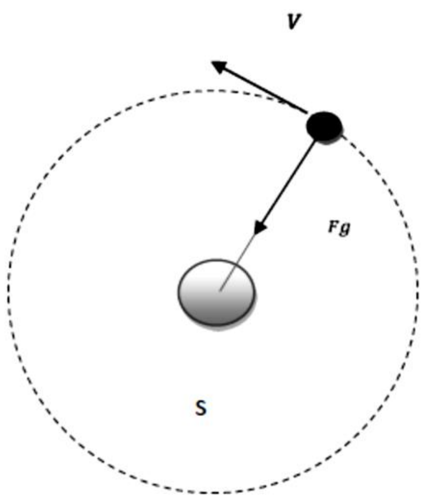
I prędkość kosmiczna

Jest to najmniejsza prędkość, jaką należy nadać ciału względem przyciągającego je ciała niebieskiego, aby ciało to poruszało się po kołowej orbicie i stało się satelitą ciała niebieskiego.
Dla planety o kształcie kuli, orbita ta jest orbitą kołową o promieniu równym promieniowi planety.
Żaden satelita nie porusza się po orbicie o promieniu równym promieniowi planety, ale I prędkość kosmiczna pozwala określić minimalną energię kinetyczną, jaką należy nadać obiektowi jeszcze na powierzchni np. Ziemi, aby mógł się on stać sztucznym satelitą Ziemi.

Przy wyprowadzeniu wzoru na pierwszą prędkość kosmiczną korzystamy z tego, że siła grawitacji działająca na ciało poruszające się po orbicie kołowej pełni rolę siły dośrodkowej:

$$F_{grawitacji} = F_{dośrodkowa}$$

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = \frac{m \cdot v^2}{R}$$



Skracamy **m** i **R** – otrzymujemy:

$$\boxed{v_I = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}}$$

v_I **–** pierwsza prędkość kosmiczna [m/s]
M – masa ciała niebieskiego, które jest źródłem pola grawitacyjnego [kg]
R – promień ciała niebieskiego [m]

Dla Ziemi :

$M = M_z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
$R = R_z = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m

$$v_I = \sqrt{\frac{G \cdot M_z}{R_z}}$$

$$v_I = 7{,}9 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 7{,}9 \frac{km}{s}$$

Umieszczenie satelitów w kosmosie służy różnym celom: badawczym, nawigacyjnym, łącznościowym. Satelity, które służą do obserwacji powierzchni Ziemi, krążą nad nią na wysokości kilkuset kilometrów. Orbity, po których krąży taki satelita, są nazywane orbitami niskimi.
Satelity łącznościowe krążą po tzw. orbitach wysokich – wysokość satelity nad powierzchnią Ziemi jest wówczas większa niż 1000 kilometrów, dzięki czemu zapewniają one łączność (np. telefonii komórkowej) na zaznaczonym obszarze Ziemi.

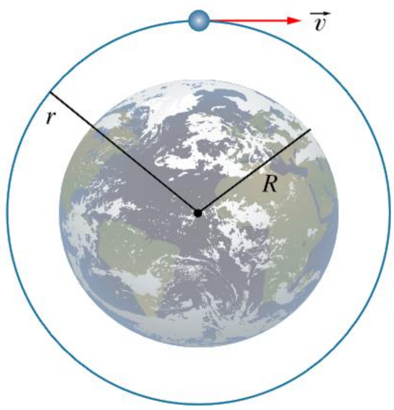
Wyprowadzony wzór na I prędkość kosmiczną wykorzystuje się również w przypadku satelitów poruszających się po orbitach kołowych wokół np. planet. Wtedy promień **r** jest promieniem orbity:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

v – prędkość liniowa satelity na orbicie,
prędkość orbitalna [m/s]

M – masa planety [kg]

r – promień orbity [m]



Prędkość liniową w ruchu po okręgu można również obliczyć ze wzorów:

$$\boxed{v = \omega \cdot r \qquad v = \frac{2\pi r}{T} \qquad v = 2\pi r f}$$

ω - prędkość kątowa [1/s]
T – okres obiegu [s]
f – częstotliwość [Hz]

Specjalnym typem satelitów są tzw. **satelity geostacjonarne**, czyli takie, które cały czas znajdują się nad tym samym punktem Ziemi. Okres ruchu takiego satelity wokół Ziemi i promień jego orbity są ściśle określone.
Orbita satelity geostacjonarnego jest kołowa i leży w płaszczyźnie równika.
<u>Okres obiegu</u>: T = 24 h = 86400 s (dokładnie 23 godziny 56 minut i 4 sekundy)

Promień orbity satelity geostacjonarnego obliczamy przyrównując dwa wzory na prędkość:

$$\sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

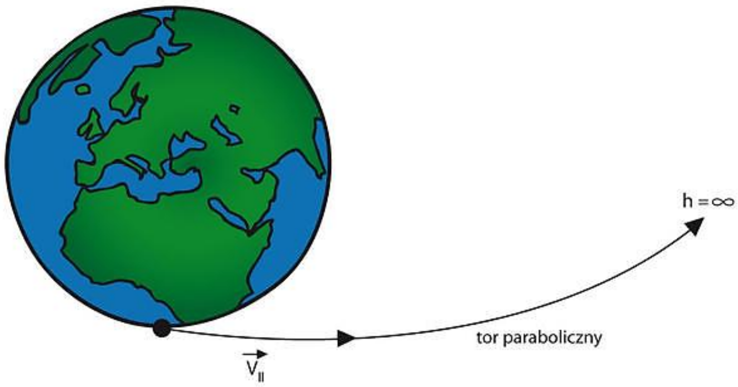
$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$ - mnożymy na krzyż

$$GMT^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

II prędkość kosmiczna

1. **II prędkość kosmiczna** – **prędkość ucieczki** – jest to najmniejsza wartość prędkości, którą należy nadać ciału, aby oddaliło się nieskończenie daleko od planety. Wyrzucone ciało pokonuje **siłę grawitacji** np. Ziemi, jego orbita staje się paraboliczna i oddala się ono do nieskończoności.



Przy wyprowadzeniu wzoru na II prędkość kosmiczną korzystamy z zasady zachowania energii.
Energia całkowita satelity znajdującego się na powierzchni planety, musi być równa całkowitej energii tego satelity w nieskończoności:

$$E_1 = E_2$$

Na powierzchni np. Ziemi: $E_1 = \frac{mv_{II}^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{R}\right)$

W odległości równej nieskończoności: $E_2 = E_{k2} + E_{p2} = 0$

Ciało oddalając się od planety zwiększa swoją energię potencjalną kosztem energii kinetycznej. W nieskończoności nie ma już energii kinetycznej $\mathbf{E_{k2} = 0}$, a energia potencjalna ma największą możliwą wartość równą zero $\mathbf{E_{p2} = 0}$

$$\frac{mv_{II}^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0$$

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \frac{GMm}{R}$$

$$\boxed{v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$
M – masa planety [kg]
R – promień planety [m]

Związek pomiędzy pierwszą i drugą prędkością kosmiczną jest więc następujący:

$$\boxed{v_{II} = \sqrt{2}\, v_I}$$

Dla Ziemi: $v_{II} = \sqrt{2} \cdot 7{,}9\ \frac{km}{s} \approx 11{,}2\ \frac{km}{s}$

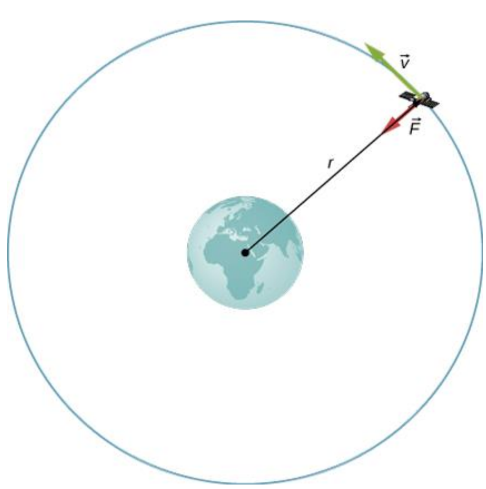
2. **III prędkość kosmiczna** – jest to prędkość potrzebna do opuszczenia Układu Słonecznego
Prędkość ta przy powierzchni Ziemi wynosi ok. 42 km/s, lecz wobec jej ruchu obiegowego wokół Słońca wystarczy przy starcie z jej powierzchni w kierunku zgodnym z tym ruchem nadać obiektowi prędkość 16,7 km/s, by opuścił on Układ Słoneczny.

3. **Czwartą prędkość kosmiczną** należy nadać ciału by opuściło naszą Galaktykę - Drogę Mleczną
W okolicach Słońca (Układu Słonecznego) prędkość ta wynosi ok. 350 km/s, lecz, wykorzystując fakt ruchu Słońca dookoła środka Galaktyki, wystarczy obiektowi nadać prędkość tylko ok. 130 km/s w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu obiegowego Słońca względem centrum Galaktyki, by mógł on ją opuścić.

Energia satelity na orbicie kołowej:

1. **Energia kinetyczna**

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$



$$E_k = \frac{m}{2} \cdot \frac{GM}{r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E_k = \frac{GMm}{2r}}}$$

$$\boldsymbol{E_k > 0}$$

2. **Energia potencjalna**

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = -\frac{GMm}{r}}}$$

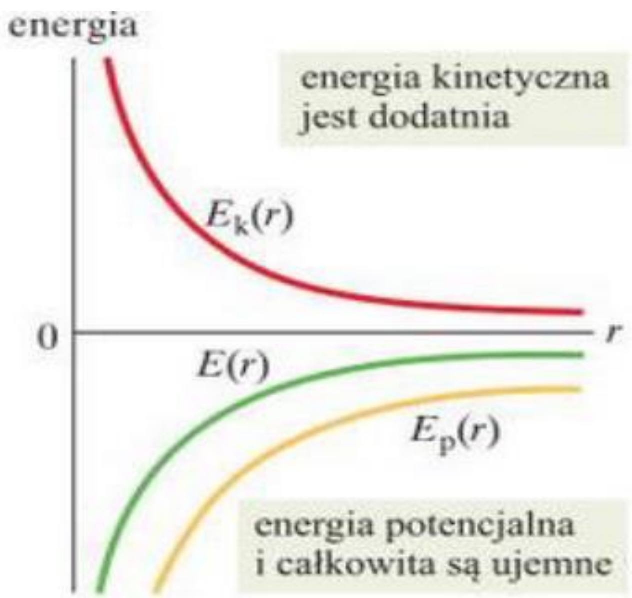
$$\boldsymbol{E_p < 0}$$

3. **Energia całkowita**

E = E_p+ E_k $\qquad E = \frac{GMm}{2r} + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$

$$\boxed{\boldsymbol{E = -\frac{GMm}{2r}}}$$

E < 0



Ruch satelitów

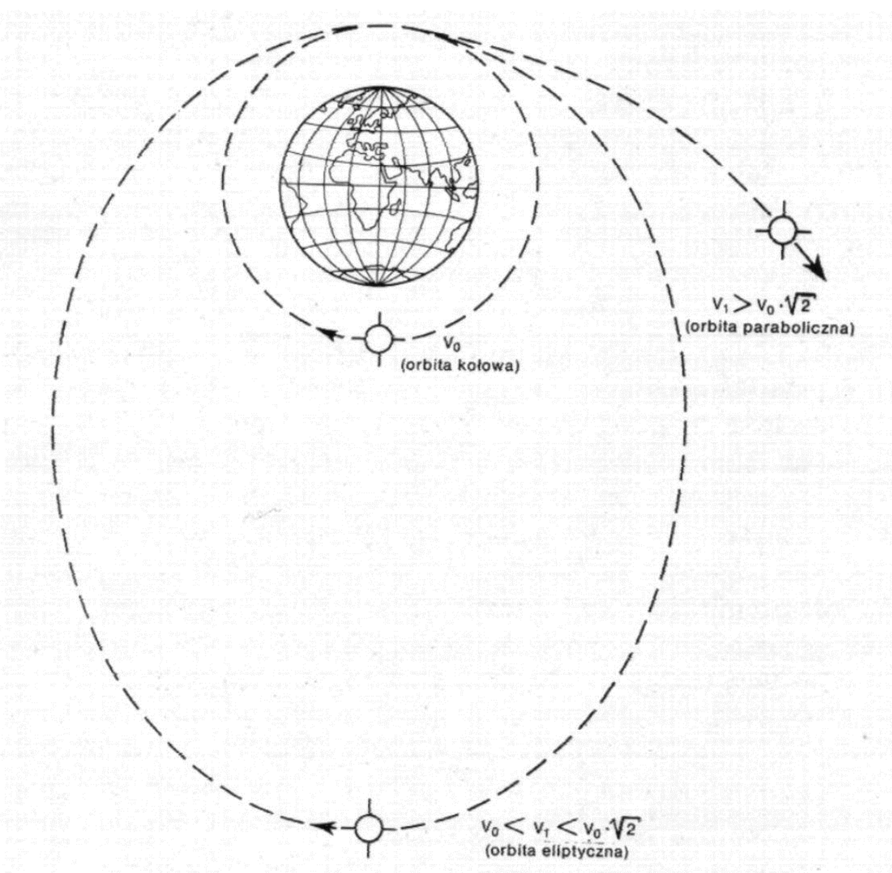
Początkowa prędkość satelity i jego kierunek mają istotny wpływ na kształt orbity. W przypadku, gdy chcemy umieścić satelitę na orbicie kołowej, jego prędkość musi dokładnie odpowiadać prędkości wyliczonej dla danej orbity:

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Jeśli jednak prędkość początkowa statku w momencie jego wejścia na orbitę będzie zawierała się w granicach między **v_0 a $\sqrt{2}$ v_0**, to orbita będzie miała **kształt eliptyczny**.

Jeśli natomiast prędkość wprowadzenia statku na orbitę będzie równa lub większa od $\sqrt{2}$ v_0, to mimo poziomego skierowania satelity zacznie poruszać się on po paraboli i ostatecznie oddali się od ziemskiego pola grawitacyjnego, odlatując w przestrzeń kosmiczną

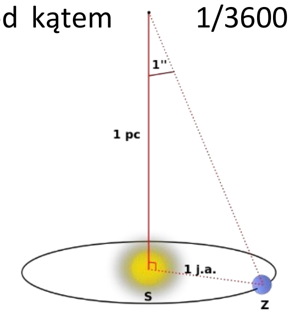
<u>Zależność między początkową prędkością satelity a kształtem jego orbity:</u>



PRAWA KEPLERA

1. **Jednostki odległości stosowane w astronomii**

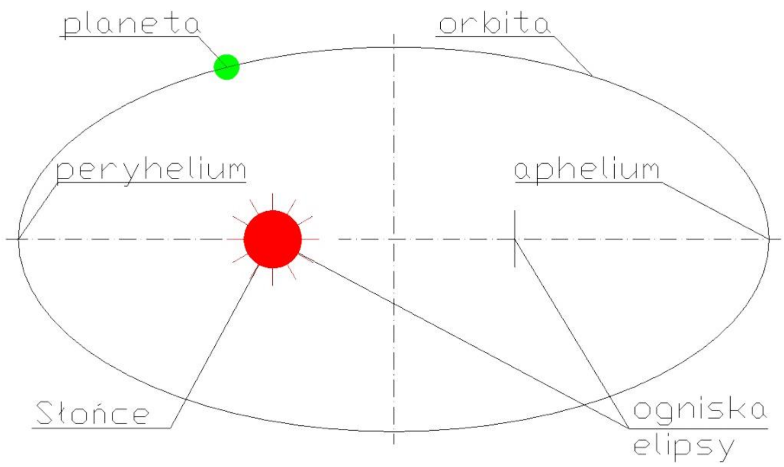
- **jednostka astronomiczna AU** lub j.a. 1AU = 150 mln km – odległość Ziemi od Słońca
- **rok świetlny ly** - odległość, jaką przebędzie światło w ciągu 1 roku poruszając się z prędkością światła 1 ly = 365x24x3600 s x $3x10^5$ km/s = $9{,}46x10^{12}$ km = $9{,}46x10^{15}$ m
- **parsek – pc** 1 pc = 3,26 ly = $3{,}09 \cdot 10^{16}$m **-** odległość, z której promień orbity okołosłonecznej Ziemi widać pod kątem 1/3600 °



2. **I prawo Keplera**

Pierwsze prawo Keplera opisuje kształt orbit planet.

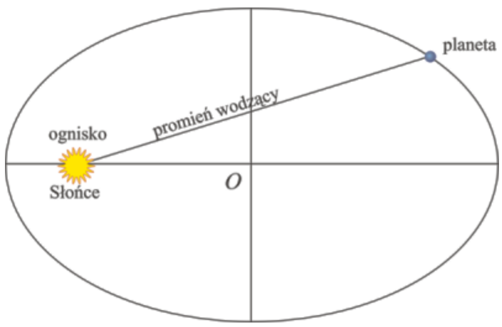
Ruch wszystkich planet wokół Słońca odbywa się po orbitach eliptycznych, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk <u>elipsy</u>.



Dla orbity eliptycznej, punkt największego zbliżenia planety do Słońca nazywa się **peryhelium.**

Najdalszy punkt położenia planety zwany jest **aphelium**.

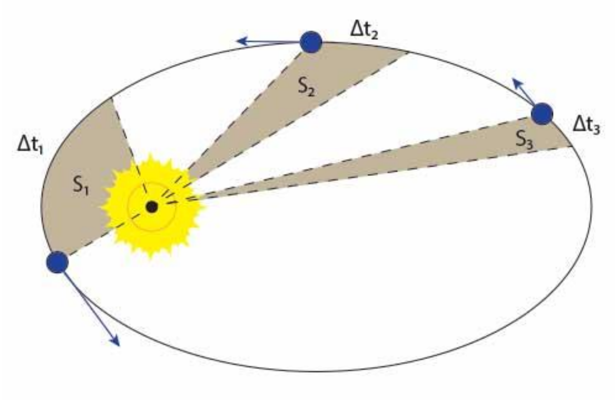
<u>Promień wodzący</u> – odcinek, który łączy gwiazdę z położeniem planety na orbicie



Powyższe prawo mówi o planetach ale dotyczy również asteroid, planetoid, komet i innych ciał niebieskich obiegających Słońce.

3. II prawo Keplera

Promień wodzący planety zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.



$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

$$S_1 = S_2 = S_3$$

Wnioski wynikające z II prawa Keplera:

- prędkość polowa planety na orbicie jest stała. Prędkość polową planety definiujemy jako stosunek pola powierzchni zakreślonego przez promień wodzący planety do czasu

$$\frac{S_1}{\Delta t_1} = \frac{S_2}{\Delta t_2} = \frac{S_3}{\Delta t_3} = \text{const}$$

- prędkość orbitalna (liniowa) planety nie jest stała

$$v = \frac{s}{t} = \frac{l}{\Delta t}$$

$$\frac{l_1}{\Delta t} > \frac{l_2}{\Delta t} > \frac{l_3}{\Delta t}$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t$$

l – droga - długość toru

Planeta poruszając się po orbicie eliptycznej musi przyspieszać, gdy zbliża się do Słońca i w miarę oddalania się od niego planeta porusza się wolniej.

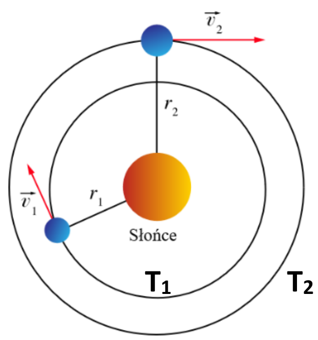
W peryhelium ma największą prędkość , a w aphelium ma najmniejszą prędkość.

Wynika to również z zasady zachowania energii i zasady zachowania momentu pędu.

4. III prawo Keplera

Trzecie prawo Keplera podaje zależność między okresem obiegu planety wokół Słońca, a jej odległością od gwiazdy.

Dwie planety krążące po orbitach kołowych



Przy wyprowadzeniu wzoru przyrównujemy siłę grawitacji działającą na jedną z planet do siły dośrodkowej:

$$F_g = F_d$$

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{m\,v^2}{r} \qquad v = \frac{2\pi\, r}{T}$$

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi\, r}{T}\right)^2$$

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\,\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$GMT^2 = 4\,\pi^2\, r^3$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{GM}$$

$\frac{4\,\pi^2}{GM} = const$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = const}}$$

M – masa gwiazdy, wokół której krążą planety
T – okres obiegu planety wokół gwiazdy [h, dni, lata]
r – średnia odległość planety od gwiazdy [km, AU]

Kwadraty okresów obiegu T planet są proporcjonalne do sześcianów ich średnich odległości r od gwiazdy.

$$\boldsymbol{\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}}$$

Prawa Keplera zostały sformułowane w 1609 roku w oparciu o dane empiryczne. Uzasadnienie tych praw wynika z powszechnego prawa ciążenia i podał je Isaac Newton w 1687 roku.